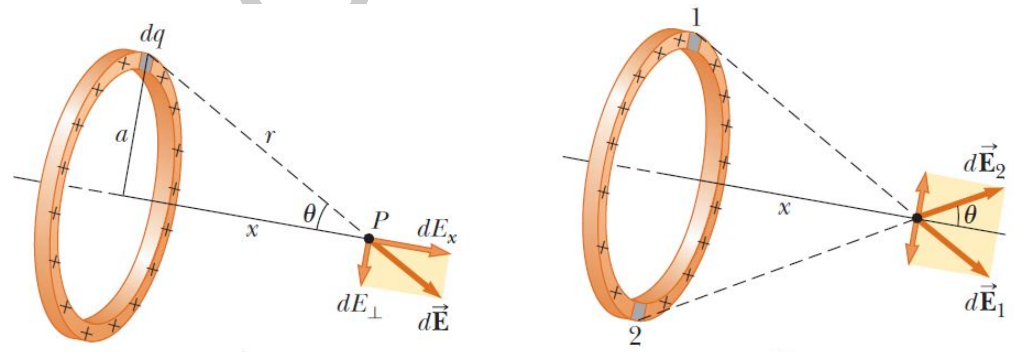
Problemas distribución continua de cargas

1. Un anillo de radio a tiene una carga total positiva distribuida uniformemente. Calcule el campo eléctrico debido al anillo en un punto P que se encuentra a una distancia x de su centro, a lo largo del eje central perpendicular al plano del anillo.

Este problema se tiene que resolver imaginando que el anillo cargado esta formado por un montón de cargas. Antes de buscar el campo formado por todas ellas nos concentraremos en el campo creado por una de estas microscópicas cargas (diferenciales de carga) que forman el anillo en el punto P. El campo de esta carga será radial i al estar cargada positiva el campo saldrá de ella. Este concepto se puede dibujar tal i como se muestra en la figura a). Una forma inteligente de tratar el problema seria ver el campo resultante creado por dos cargas situados a cada lado del anillo y después hacer lo mismo para todo el anillo. Este procedimiento se ve esquematizado en la figura b).



a) b)

Al utilizar este método nos aparecen unas componentes paralelas y perpendiculares al eje. Como todos los diferenciales de carga son del mismo valor y dada la simetría del sistema las componentes perpendiculares se anulan quedando solo las componentes paralelas al eje. Esta componente que se encuentra al eje será el cos del campo creado por la carga. La distancia de estas cargas al punto P viene dad por la

hipotenusa del triangulo que forma el radio con la distancia al centro del anillo del punto P.

$$\mathrm{dE_x} = \mathrm{k_e}\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{r^2}}\cos\theta = \mathrm{k_e}\frac{\mathrm{dq}}{(\sqrt{\mathrm{a^2+x^2}})^2}\cos\theta \tag{1}$$

El cos del angulo también se puede poner en función del radio y la distancia del punto P al centre del anillo.

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{a^2+x^2}}} \tag{2}$$

$$\mathrm{dE_x} = \mathrm{k_e}\frac{\mathrm{dq}}{(\sqrt{\mathrm{a^2+x^2}})^2}\cos\theta = \mathrm{k_e}\frac{\mathrm{dq}}{(\sqrt{\mathrm{a^2+x^2}})^2}\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{a^2+x^2}}} = \mathrm{k_e}\frac{\mathrm{x\,dq}}{(\mathrm{a^2+x^2})^{\frac{3}{2}}} \tag{3}$$

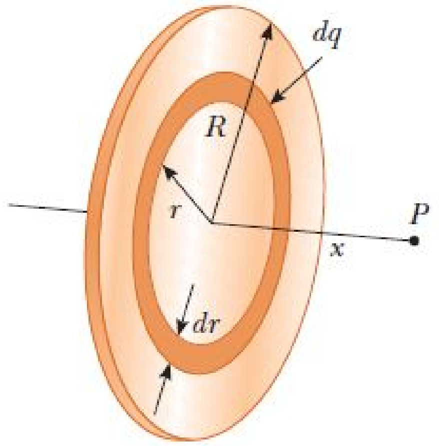
La expresión conseguida nos da el diferencial de campo creado por un diferencial de carga. Lo que nos faltaría para saber el campo creado por todo el anillo es sumar este campo por todas las cargas del anillo. Es decir integrar el diferencial de carga para todo el anillo. Debemos recordar que la integral solo se hace sobre la variable q tal i como indica el diferencial dq, todo lo que no contenga esta variable es una contantes y puede salir de la integral.

$$\mathrm{E_x} = \int \mathrm{k_e}\frac{\mathrm{x\,dq}}{(\mathrm{a^2+x^2})^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{k_e}\frac{\mathrm{x}}{(\mathrm{a^2+x^2})^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{dq} = \mathrm{k_e}\frac{\mathrm{x}}{(\mathrm{a^2+x^2})^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{Q} \tag{4}$$

El campo obtenido es el valor del campo eléctrico creado por el anillo en el punto P, situado sobre el eje perpendicular al centro del anillo a una altura x. Este campo tal y como se ha visto con el dibujo estará encima del eje perpendicular al centro del anillo y estará dirigido hacia arriba.

2. Un disco de radio R tiene una densidad de carga superficial uniforme s. Calcule el campo eléctrico en un punto P que se encuentra a lo largo del eje perpendicular central del disco y a una distancia x del centro del disco.

Este problema se puede resolver rápidamente si pensamos que un disco básicamente es un conjunto de pequeños anillos de un radio r y



grosor muy pequeño (dr) todos juntos, tal y como se muestra en la figura.

Por lo tanto podemos utilizar el resultado del anterior problema para resolver la cuestión planteada en este de forma rápida y eficiente. La única diferencia es que ahora el radio no sera constante y sera la variable a integrar des de zero al radio del disco. Además ahora cada anillo contribuirá con un diferencial de carga dq. Como nos dicen que el disco esta cargado con una densidad superficial de carga buscamos la relación entre dq i σ

$$\mathbf{dq = \sigma \cdot dS = \sigma 2\pi r dr} \tag{5}$$

$$\mathbf{dE_{x(anillo)}(r) = k_e \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dq = k_e \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi\sigma r dr} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E_{x(disco)}} &= \mathbf{\int dE_{x(anillo)}(r) = \int_0^R k_e \frac{x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi\sigma r dr =} \\ &= \mathbf{k_e \pi\sigma \int_0^R \frac{x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} 2 r dr = k_e\pi\sigma \int_0^R \frac{x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} d(r^2) =} \\ &= \mathbf{\left[k_e\pi\sigma \frac{x}{(r^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^R = k_e\pi\sigma \frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} - k_e\pi\sigma \frac{x}{(0^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\mathbf{E_{x(disco)} = 2\pi k_e \sigma \left[1 - \frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]} \tag{8}$$

El campo obtenido es el creado por un disco de carga superficial uniforme en el punto P situado sobre el eje perpendicular al centre del disco.