# SOLUCIONES DE RECTAS TANGENTES Y PERPENDICULARES A FUNCIONES

## 1. Solución

a) Hay que derivar la función e igualar a 0.

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$2x - 6 = 0$$

$$x = 3$$

Como el punto pertenece a la curva, su altura es $f(3) = 9 - 18 + 12 = 3$.

Finalmente, tenemos que el mínimo absoluto es el $(3{,}3)$.

b) La recta que buscamos es de la forma $y = mx + n$. Hay que encontrar el valor de los parámetros $m$ y $n$.

La recta pasa por el punto $(9, -3)$, por lo que entonces, si lo colocamos en la ecuación de la recta, obtenemos :

$$-3 = 9m + n$$

La recta es tangente a la parábola. No sabemos donde, así que supongamos que lo es en $x = a$ desconocido. Si es tangente a la parábola en ese lugar, entonces dos cosas :

- Por un lado, la recta pasa por el punto $(a, f(a))$, o sea, por el punto $(a, a^2 - 6a + 12)$. Si colocamos el punto en la recta, obtenemos :

$$a^2 - 6a + 12 = am + n$$

- Por otro lado, el pendiente de la recta es igual al de la función en $x = a$, o sea, que el pendiente de la recta es $f'(a) = 2a - 6$. Por lo tanto :

$$m = 2a - 6$$

Hemos obtenido un total de 3 ecuaciones con 3 variables, por lo que nos disponemos a resolverlo.

$$\begin{cases} -3 = 9m + n \\ a^2 - 6a + 12 = am + n \\ m = 2a - 6 \end{cases}$$

Las soluciones son :

$$y = -2\left(\sqrt{42} - 6\right)x + 3(6\sqrt{42} - 37)$$

$$y = 2\left(\sqrt{42} + 6\right)x - 3(6\sqrt{42} + 37)$$

Queríamos que la recta tuviera pendiente positivo, por lo que descartamos la primera recta. Nuestra solución es la segunda.

c) La recta que buscamos es de la forma $y = mx + n$. Hay que encontrar el valor de los parámetros $m$ y $n$.

La recta pasa por el punto $(3{,}9)$, por lo que entonces, si lo colocamos en la ecuación de la recta, obtenemos :

$$9 = 3m + n$$

La recta es perpendicular a la parábola. No sabemos donde, así que supongamos que lo es en $x = a$ desconocido. Si es perpendicular a la parábola en ese lugar, entonces dos cosas :

- Por un lado, la recta pasa por el punto $(a, f(a))$, o sea, por el punto $(a, a^2 - 6a + 12)$. Si colocamos el punto en la recta, obtenemos :

$$a^2 - 6a + 12 = am + n$$

- Por otro lado, el pendiente de la recta es el tangente al de la función en $x = a$, o sea, que el pendiente de la recta es $-\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{6-2a}$. Por lo tanto :

$$m = \frac{1}{6 - 2a}$$

Hemos obtenido un total de 3 ecuaciones con 3 variables, por lo que nos disponemos a resolverlo.

$$\begin{cases} 9 = 3m + n \\ a^2 - 6a + 12 = am + n \\ m = \dfrac{1}{6 - 2a} \end{cases}$$

Las soluciones son :

$$y = \frac{1}{\sqrt{22}}x - \frac{3}{22}(\sqrt{22} - 66)$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{22}}x + \frac{3}{22}(\sqrt{22} + 66)$$

$$x = 3$$

## 2. Solución

a) La recta que buscamos tiene pendiente $3 \cdot e^2$, así que será de la forma :

$$y = 3 \cdot e^2 \cdot x + n$$

Para encontrar por qué punto de la función pasa, miraremos cuándo la función toma este pendiente. Para ello hay que encontrar cuándo la derivada toma el valor $3 \cdot e^2$.

$$f'(x) = 3 \cdot e^2$$

$$(x + 1)e^x = 3 \cdot e^2$$

Una solución de esta ecuación es $x = 2$. ¿Como vemos que esta es la única solución, o sea, como vemos que $f'(x)$ toma el valor $3 \cdot e^2$ solo una vez?

Está claro que si $x < -1$, $f'(x)$ será negativa siempre y si $x > -1$, será positiva. Como $3 \cdot e^2$ es un valor positivo, solo hay que ver que $f'(x)$ toma el valor $3 \cdot e^2$ una vez cuando $x > -1$.

Veamos la derivada de $f'(x)$ para estudiar su monotonía.

$$f''(x) = (x + 2)e^x$$

Vemos que $f''(x)$ es positiva a partir de $x > -2$, por lo que cuando $x > -1$ siempre es positiva. Por lo que cuando $x > -1$, $f'(x)$ siempre es creciente.

Como $f'(x)$ es siempre creciente, para tomar el valor $3 \cdot e^2$ más de una vez tendría que crecer hasta él y después decrecer otra vez para volver al valor, ¡pero eso es imposible, ya que hemos dicho que es creciente siempre!

Conclusión : La única solución de $(x+1)e^x = 3 \cdot e^2$ es $x = 2$. Por lo tanto, una recta con pendiente $3 \cdot e^2$ tangente a nuestra función, solo puede ser tangente en $x = 2$. Entonces toca a la función en $x = 2$, o sea que pasa por el punto :

$$\left(2, f(2)\right) = (2, 2 \cdot e^2)$$

Si ponemos el punto en la ecuación de nuestra recta, obtenemos :

$$2 \cdot e^2 = 3 \cdot e^2 \cdot 2 + n$$

$$n = -4 \cdot e^2$$

La recta que buscamos entonces es la recta :

$$y = 3 \cdot e^2 \cdot x - 4 \cdot e^2$$

b) Las dos rectas tienen pendiente distinto, por lo que en el plano tendrán una intersección. La distancia entre dos rectas que se tocan es 0, por lo que la distancia de nuestra recta a la del apartado anterior es 0.

c) Llamemos $s$ a la recta que buscamos y $r$ a la recta del apartado a).

En general, $s$ está definida por $y = mx + n$. Hay que encontrar estos $m$ y $n$.

Para empezar, sabemos que $s$ pasa por $S$. Si ponemos el punto $S = (0,12)$ en la ecuación de la recta, obtenemos :

$$12 = n$$

Ahora nos queda obtener el pendiente.

Sabemos que $r$ y $s$ tienen un ángulo de 60º. Esto quiere decir que sus vectores directores $v_r$ y $v_s$, respectivamente, forman un ángulo de 60º. Por lo tanto, usando la fórmula del producto escalar :

$$\cos(60) = \frac{1}{2} = \frac{|v_r \cdot v_s|}{|v_r| \cdot |v_s|}$$

Hay que encontrar estos vectores directores entonces.

Como ya tenemos la recta $r$ y su pendiente $m_r$, su vector director $v_r$ es $v_r = (1, m_r) = (1, 3 \cdot e^2)$. Su módulo es $\sqrt{1 + 9 \cdot e^4}$.

No sabemos el pendiente $m_s$. Sea cual sea, tenemos que el vector director $v_s$ es $v_s = (1, m_s)$. Su módulo es $\sqrt{1 + m_s^2}$.

El producto escalar de los dos vectores es $1 + 3 \cdot m_s \cdot e^2$.

Lo ponemos todo en la ecuación y obtenemos :

$$\frac{1}{2} = \frac{1 + 3 \cdot m_s \cdot e^2}{\sqrt{1 + 9 \cdot e^4} \cdot \sqrt{1 + m_s^2}}$$

Si resolvemos la ecuación, obtenemos :

$$m_s = \frac{-12\, e^2 + \sqrt{-3 + 72\, e^4 + 243\, e^8}}{1 + 27\, e^4}$$

$$m_s = \frac{-12\, e^2 - \sqrt{-3 + 72\, e^4 + 243\, e^8}}{1 + 27\, e^4}$$

Estos dos pendientes definen las dos rectas que buscamos.