

SOLUCIONES DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS

1. Realiza la siguiente demostración

Solución : Vía 1 – Demostración parecida a la del vídeo.

$$S_{n,m} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m$$

Convertimos todos los términos en a_n

$$S_{n,m} = a_n + (a_n + d) + (a_n + 2d) + \dots + (a_n + (m - n)d)$$

Agrupamos todos los a_n y d

$$S_{n,m} = a_n + a_n + d + a_n + 2d + \dots + a_n + (m - n)d$$

$$S_{n,m} = (m - n + 1) \cdot a_n + d + 2d + (m - n)d$$

$$S_{n,m} = (m - n + 1) \cdot a_n + d \cdot (1 + 2 + \dots + (m - n))$$

Usamos la fórmula para la suma de los k primeros números del enunciado

$$S_{n,m} = (m - n + 1) \cdot a_n + d \cdot \frac{(m - n)(m - n + 1)}{2}$$

Extraemos factor común $(m - n + 1)$

$$S_{n,m} = (m - n + 1) \left(a_n + d \cdot \frac{(m - n)}{2} \right)$$

Metemos todo dentro de la fracción

$$S_{n,m} = (m - n + 1) \cdot \left(\frac{2 \cdot a_n + d \cdot (m - n)}{2} \right)$$

Separamos $2 \cdot a_n$ en $a_n + a_n$

$$S_{n,m} = (m - n + 1) \cdot \left(\frac{a_n + a_n + d \cdot (m - n)}{2} \right)$$

Finalmente, $a_n + d \cdot (m - n) = a_m$, así que :

$$S_{n,m} = (m - n + 1) \cdot \left(\frac{a_n + a_m}{2} \right)$$

Solución : Vía 2 – El truco está en ver que $S_{n,m}$ son los términos del n al m, o sea, los términos del 1 al m restando después los del 1 al n-1, o sea :

$$S_{n,m} = S_m - S_n$$

Desarrollando S_m y S_n llegaréis rápido a la fórmula que se os pide.

2. Realiza el siguiente ejercicio

Primeros ejercicios

a) $a_1 = 400; d = -34$

b) Queremos encontrar n que satisfaga :

$$a_n \leq 0$$

Desarrollando :

$$a_1 + (n - 1) \cdot d \leq 0$$

$$400 + (n - 1) \cdot (-34) \leq 0$$

$$400 + 34 - 34n \leq 0$$

$$434 - 34n \leq 0$$

$$434 \leq 34n$$

$$\frac{434}{34} \approx 12.76 \leq n$$

Encontramos que n debe ser 13 o mayor. Como a_1 simbolizaba 0 saltos, entonces la rana en 12 saltos llegará a su amigo el sapo.

c) Simplemente hay que encontrar el término a_{26}

$$a_{26} = a_1 + 25 \cdot d = 400 - 25 \cdot 34 = -450$$

Como el sapo está en la posición 0, la rana estará alejada 450m del sapo cuando haya dado 25 saltos.

Segundos ejercicios

a) $b_1 = 400; d = -11$

b) Se resuelve como el b) de los primeros ejercicios.

$$b_n \leq 0$$

$$b_1 + (n - 1) \cdot d \leq 0$$

$$400 + (n - 1) \cdot (-11) \leq 0$$

$$400 + 11 - 11n \leq 0$$

$$411 - 11n \leq 0$$

$$411 \leq 11n$$

$$\frac{411}{11} \approx 37.36 \leq n$$

Encontramos que n debe ser 38 o mayor. Como b_1 simbolizaba 0 saltos, entonces habrán dado 37 saltos hasta encontrarse.

3. Realiza el siguiente ejercicio

$\{a_i\}_{i \geq 1} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ no es una progresión aritmética, ya que a simple vista podemos ver dos pares de términos entre los que no hay la misma diferencia (1, 2; 2, 4; por ejemplo).

$\{b_i\}_{i \geq 1} = \{23, 23, 23, 23, 23, \dots\}$ es una progresión aritmética con primer término 23 y diferencia 0. Todos sus elementos son iguales, así que su elemento 1234 es 23, y la suma de los 333 primeros términos es $23 \cdot 333 = 7659$.

$\{c_i\}_{i \geq 1} = \left\{ \frac{13}{7}, \frac{34}{14}, 3, \frac{25}{7}, \frac{29}{14}, \dots \right\}$ es una progresión aritmética con primer término $\frac{13}{7}$ y diferencia $\frac{4}{7}$.

$$c_{1234} = c_1 + 1233 \cdot d = \frac{13}{7} + 1233 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4945}{7}$$

$$S_{333} = 333 \cdot \frac{c_1 + c_{333}}{2} = 333 \cdot \frac{\frac{13}{7} + \frac{1341}{7}}{2} = 333 \cdot \frac{1354}{14} = \frac{225441}{7}$$

$\{d_i\}_{i \geq 1} = \{-2, 4, -6, 8, -10, 12, -14, \dots\}$ no es una progresión aritmética. Parece que su diferencia es 2, pero no es cierto, ya que los números van cambiando de signo.

Vemos que los términos $d_1, d_3, d_5, d_7, \dots$ definen una progresión aritmética con término inicial -2 y diferencia -4. Por otra parte, los términos $d_2, d_4, d_6, d_8, \dots$ definen otra con término inicial 4 y diferencia 4.

Sumar los 333 primeros términos de la sucesión no es más que sumar los 167 primeros de la primera progresión aritmética y los 166 primeros de la segunda. A estas dos sumas las llamaremos A y B.

$$S_{333} = A + B = 167 \cdot \frac{-2 - 666}{2} + 166 \cdot \frac{4 + 664}{2} = 167 \cdot \frac{-668}{2} + 166 \cdot \frac{668}{2} = -334$$

$\{e_i\}_{i \geq 1} = \{12, 11.5, 11, 10.5, 10, \dots\}$ es una progresión aritmética con primer término 12 y diferencia -0.5.

$$e_{1234} = e_1 + 1233 \cdot d = 12 - 1233 \cdot 0.5 = -604.5$$

$$S_{333} = 333 \cdot \frac{e_1 + e_{333}}{2} = 333 \cdot \frac{12 - 154}{2} = 333 \cdot \frac{-142}{2} = -23643$$

4. Realiza el siguiente ejercicio

Las monedas de los barriles son una sucesión con primer término 4 y diferencia 4.

Lo podemos calcular viendo que es la suma de los primeros 23 barriles restando los 6 primeros. Usaré la fórmula del ejercicio 1.

$$S_{7,23} = (23 - 7 + 1) \cdot \frac{b_7 + b_{23}}{2} = 17 \cdot \frac{28 + 92}{2} = 17 \cdot \frac{120}{2} = 1020$$

Los piratas se llevan en total 1020 monedas de oro.