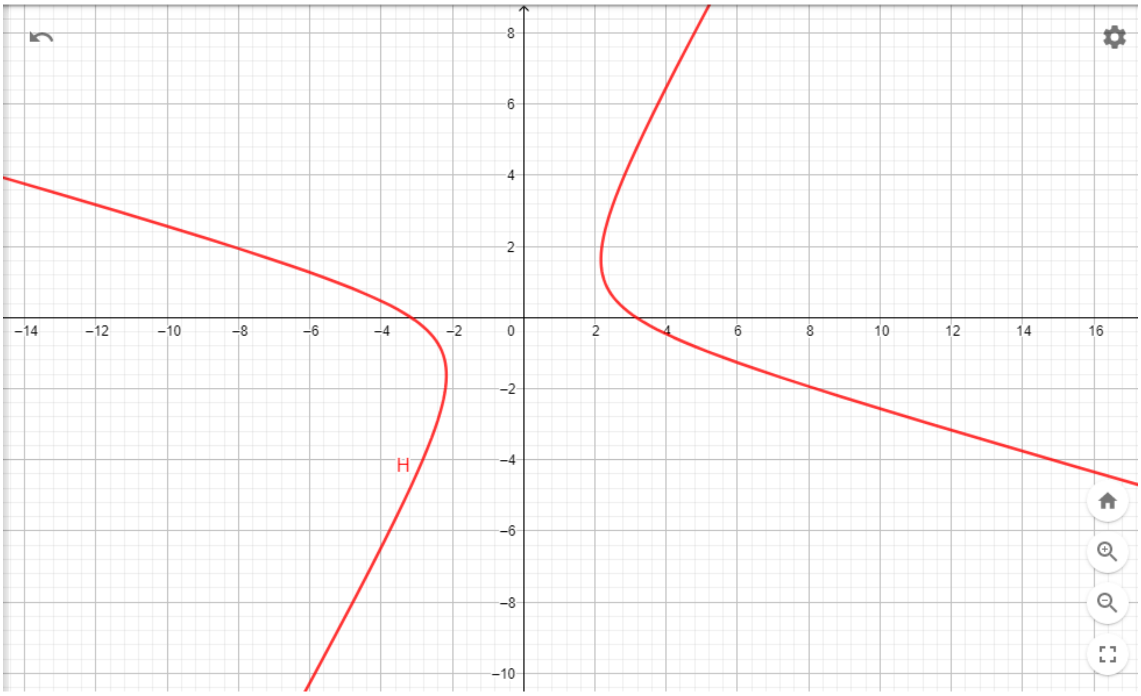
SOLUCIONES DE RECTAS TANGENTES Y PERPENDICULARES A CURVAS

1. Solución

a) He aquí un dibujo de la curva (es una hipérbola) :



b) Hay que derivar ambos lados de la ecuación siguiente :

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}xy - y^2 = 5$$

Derivamos y obtenemos :

$$x + \frac{3}{2}(y + xy') - 2yy' = 0$$

Aplicamos la propiedad distributiva :

$$x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}xy' - 2yy' = 0$$

Pasamos los términos con y' a la derecha :

$$x+\frac{3}{2}y=-\frac{3}{2}xy'+2yy'$$

Extraemos factor común y' :

$$x+\frac{3}{2}y=y'(-\frac{3}{2}x+2y)$$

Pasamos dividiendo para aislar y' :

$$\frac{x+\frac{3}{2}y}{-\frac{3}{2}x+2y}=y'$$

Para acabar de arreglar, multiplicamos por 2 la fracción arriba y abajo :

$$\frac{2x+3y}{-3x+4y}=y'$$

c) Primero resolveremos los puntos en que $y'=1$

$$\frac{2x+3y}{-3x+4y}=1$$

Resolvemos y obtenemos :

$$y=5x$$

Ahora sustituimos en la ecuación de la curva :

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x(5x)-(5x)^2=5$$

Y resolvemos :

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}5x^2-25x^2=5$$

$$x^2+15x^2-50x^2=10$$

$$-34x^2=10$$

$$x=\pm\sqrt{-\frac{5}{17}}$$

Llegamos a la conclusión de que no hay puntos que cumplan que $y' = 1$.

Probamos suerte con $y' = -1$

Repitiendo el proceso, obtenemos :

$$x = 7y$$

Y si sustituimos en la ecuación de la curva y resolvemos, obtenemos :

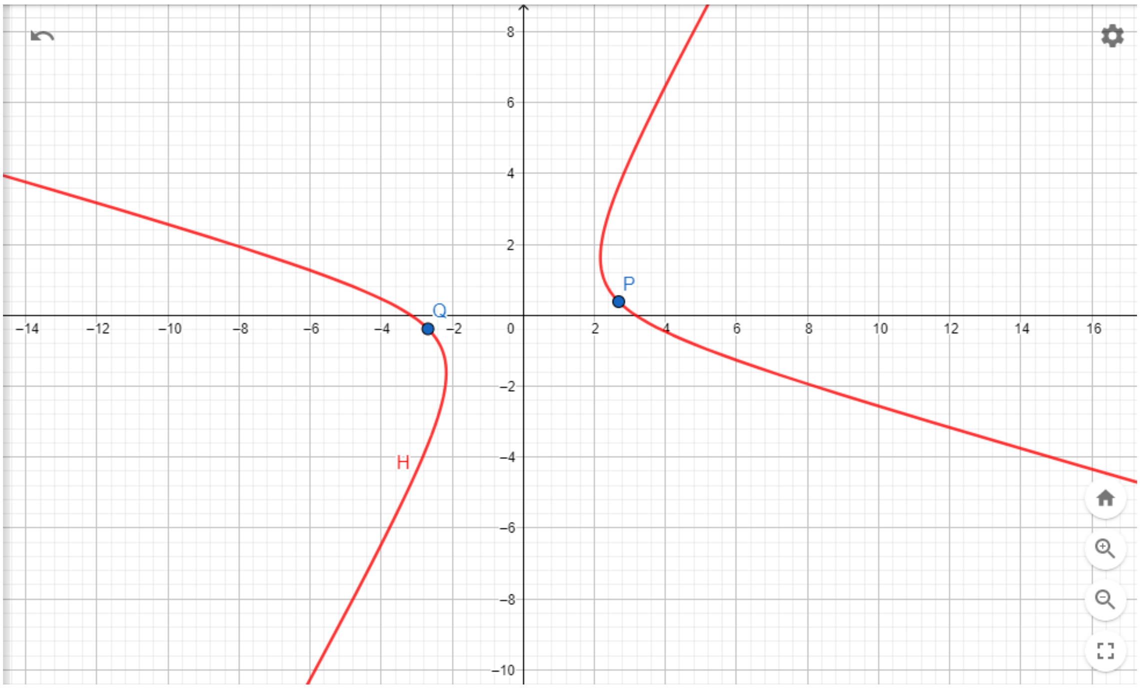
$$y = \pm\sqrt{\frac{5}{34}}$$

Por lo que :

$$x = \pm 7\sqrt{\frac{5}{34}}$$

Los puntos con $y' = -1$ son los puntos :

$$P = \left(7\sqrt{\frac{5}{34}}, \sqrt{\frac{5}{34}}\right) \qquad Q = \left(-7\sqrt{\frac{5}{34}}, -\sqrt{\frac{5}{34}}\right)$$



d) Las rectas tangentes en estos puntos son muy fáciles. Su pendiente es $y' = -1$, que hemos fijado con anterioridad, y cada una pasa por el punto P o el punto Q.

Calculemos la recta tangente en el punto P. Es de la forma :

$$r_P: y = -x + n$$

Ahora, como sabemos que pasa por el punto P :

$$\sqrt{\frac{5}{34}} = -7\sqrt{\frac{5}{34}} + n$$

Resolvemos para n :

$$8\sqrt{\frac{5}{34}} = n$$

$$4\sqrt{\frac{10}{17}} = n$$

Tenemos, finalmente, que la primera recta es :

$$r_P: y = -x + 4\sqrt{\frac{10}{17}}$$

Repetimos para la otra recta y obtenemos :

$$r_Q: y = -x - 4\sqrt{\frac{10}{17}}$$

Finalmente, como las rectas son paralelas, para encontrar su distancia, escogemos una recta perpendicular a estas, o sea, con pendiente $m = -\frac{1}{-1} = 1$, por ejemplo : $s: y = x$.

Ahora, cortamos cada una de las rectas con esta recta que hemos escogido :

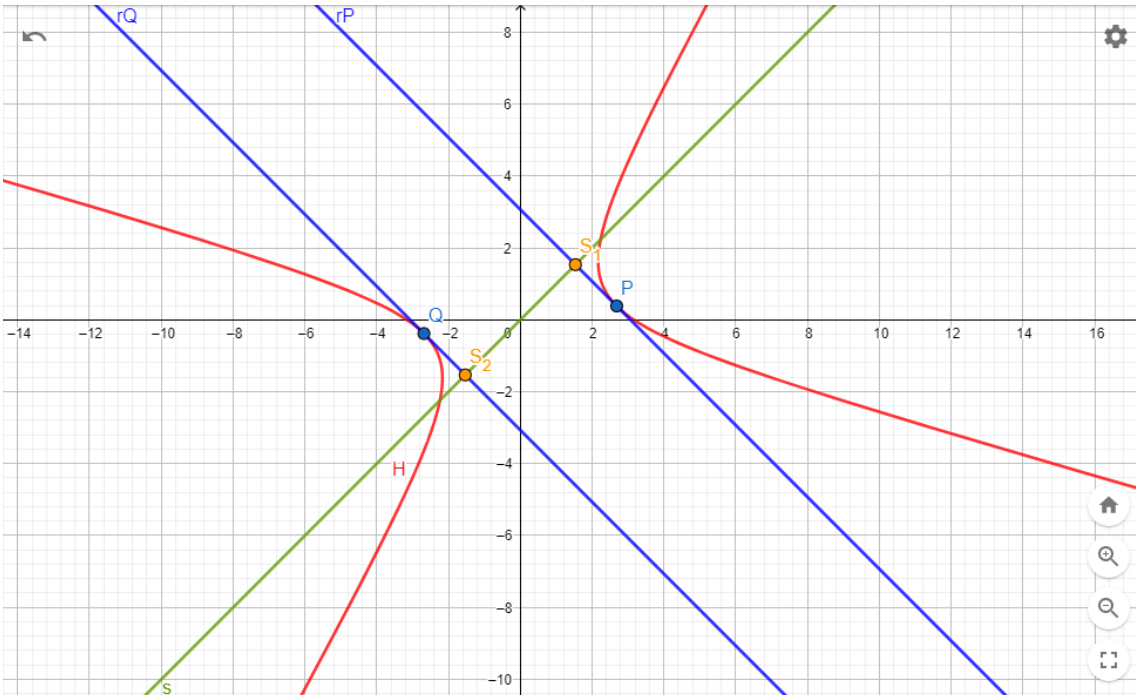
Corte entre r_P, s

$$x = -x + 4\sqrt{\frac{10}{17}}$$

$$x = 2\sqrt{\frac{10}{17}}$$

Nos sale el punto $S_1 = (2\sqrt{\frac{10}{17}}, 2\sqrt{\frac{10}{17}})$

Repitiendo para r_Q obtenemos $S_2 = (-2\sqrt{\frac{10}{17}}, -2\sqrt{\frac{10}{17}})$

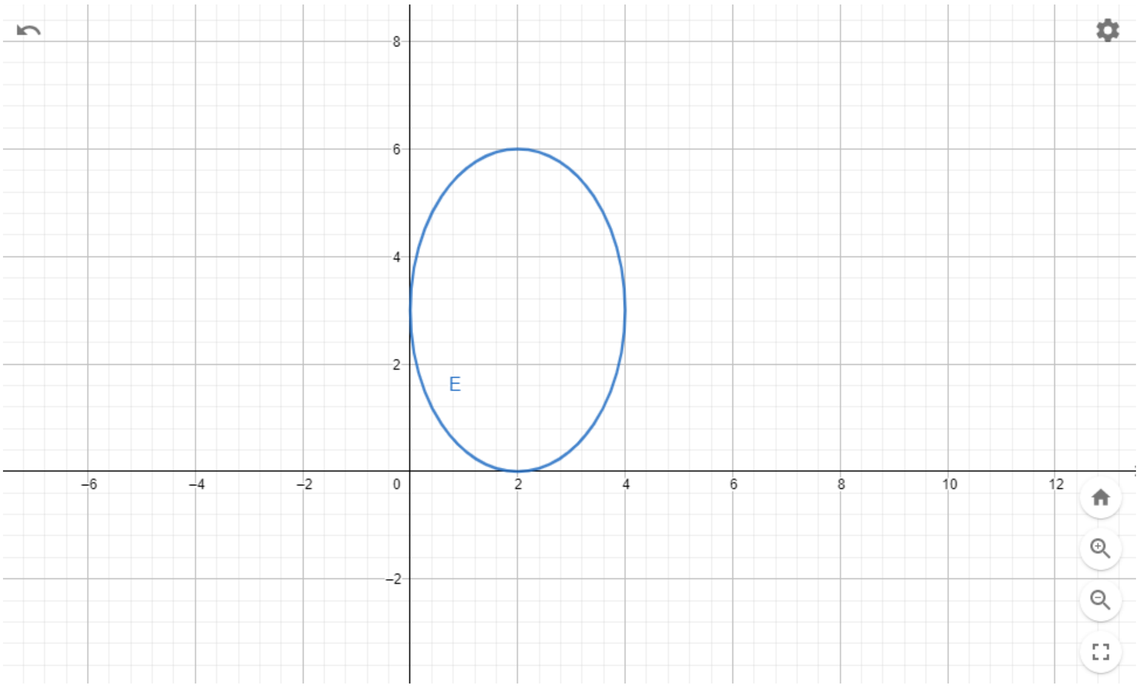


La distancia entre las dos rectas es la misma que la distancia entre los dos puntos, que es :

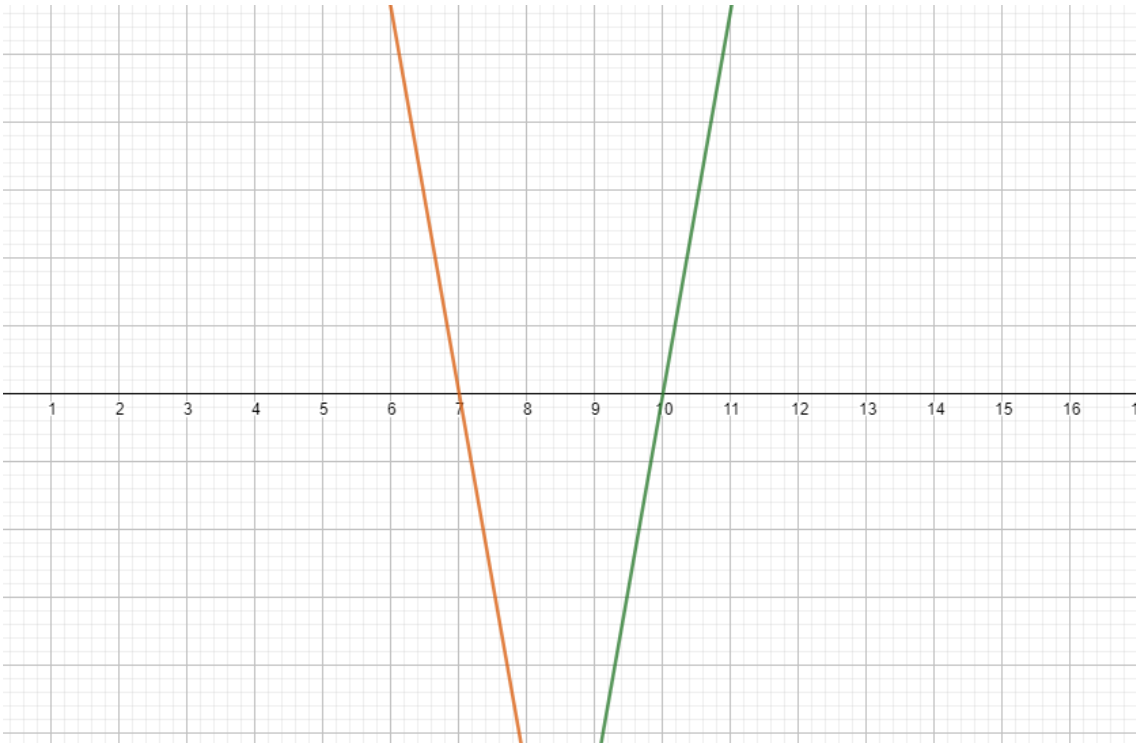
$$d(S_1, S_2) = |S_2 - S_1| = \left|-4\sqrt{\frac{10}{17}}, -4\sqrt{\frac{10}{17}}\right| = \sqrt{2 \cdot 16\frac{10}{17}} = 8\sqrt{\frac{5}{17}}$$

2. Solución

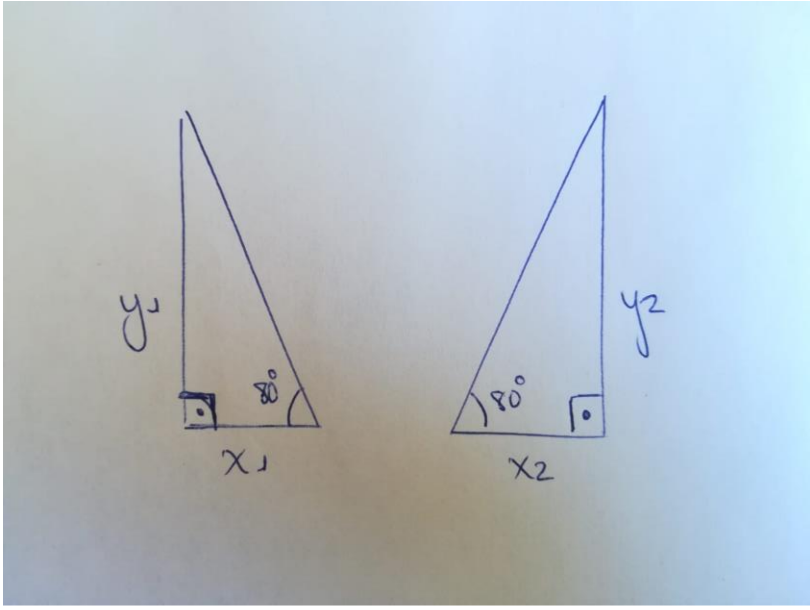
Primero empezamos dibujando la curva. En el dibujo podréis apreciar una elipse :



Buscamos rectas de la forma $y = mx + n$ con 80º de inclinación al eje x. Eso quiere decir que forman un triángulo de 80º cortando en el eje x. Son las rectas de este tipo :



El ángulo de corte es de 80º. Como el pendiente es el aumento de ordenadas entre el aumento de abscisas, tenemos que forman estos triángulos :



Y los posibles pendientes serán $m_1 = \frac{-y_1}{x_1}$, $m_2 = \frac{y_2}{x_2}$

Con trigonometría, se ve que :

$$m_1 = -\tan(80º) \approx -5.671$$

$$m_2 = \tan(80º) \approx 5.671$$

Descartamos el segundo pendiente, ya que es positivo y lo queremos negativo. Visto esto, queremos rectas tangentes a esa elipse con pendiente m_1. Derivemos implícitamente la ecuación de la elipse :

$$\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{3}\right)^2\right)' = 1'$$

$$\frac{x-2}{2} + \frac{2(y-3)}{9}y' = 0$$

$$y' = -\frac{9(x-2)}{2(y-3)}$$

Buscamos los puntos que tienen $y' = m_1 \approx -5.671$:

$$-5.671 = -\frac{9(x-2)}{2(y-3)}$$

$$1.260 \cdot (y-3) = (x-2)$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse obtenemos :

$$\left(\frac{1.260 \cdot (y-3)}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{3}\right)^2 = 1$$

$$0.508 \cdot (y-3)^2 = 1$$

$$(y-3)^2 = 1.969$$

$$y - 3 = \pm 1.403$$

$$y = \pm 1.403 + 3$$

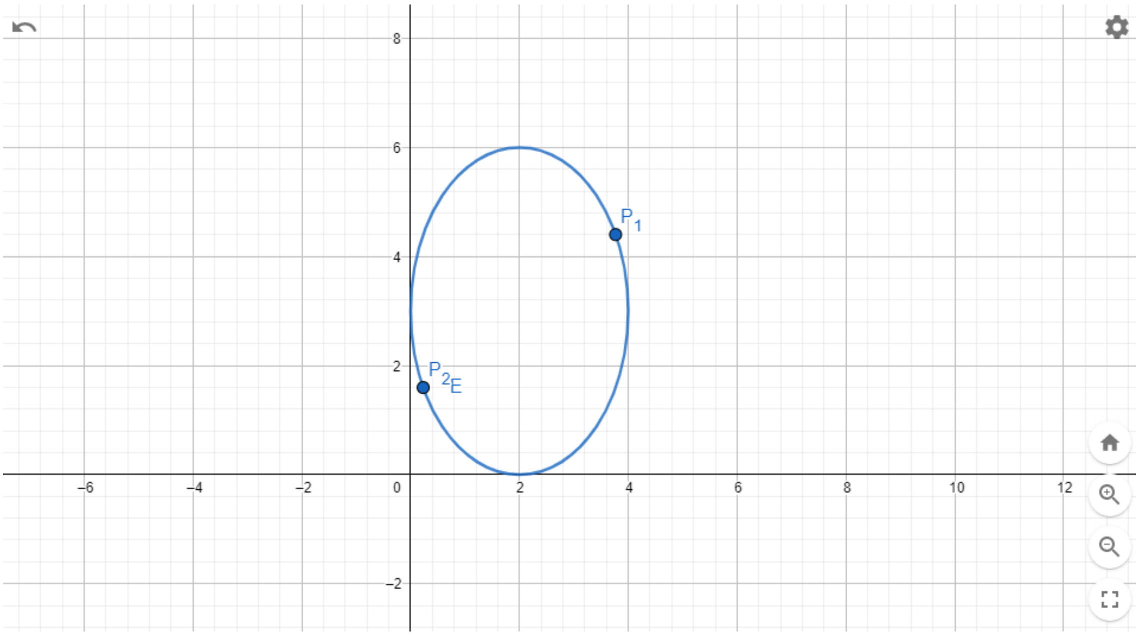
$$y_1 = 4.403; y_2 = 1.597$$

Sustituyendo en la ecuación, obtenemos entonces que :

$$x_1 = 3.767; x_2 = 0.232$$

Obtenemos los puntos de tangencia :

$$P_1 = (3.768, 4.403); P_2 = (0.232, 1.597)$$



Finalmente, como tenemos punto y pendiente de nuestras, rectas, ya podemos sacar sus fórmulas :

Encontramos r_1, la recta que pasa por P_1 :

Como sabemos su pendiente y un punto por donde pasa, sustituimos :

$$4.403 = -5.671 \cdot 3.768 + n$$

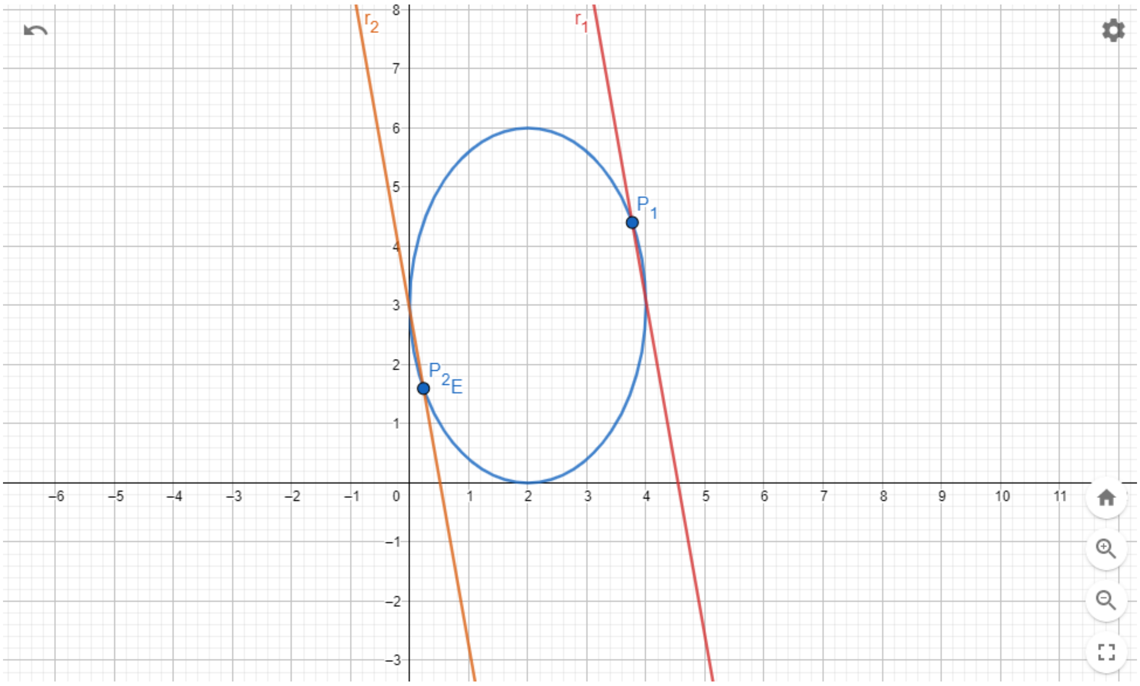
$$4.403 + 5.671 \cdot 3.768 = n = 25.771$$

Finalmente, tenemos :

$$r_1 : y = -5.671x + 25.771$$

Y repitiendo con P_2, tenemos :

$$r_2 : y = -5.671x + 2.913$$



Nota : El dibujo es aproximado, no es perfecto, ya que hemos hecho los cálculos de manera aproximada.