SOLUCIONES DE DERIVADAS DE EXPONENCIALES

1. Realiza las siguientes demostraciones

a) Solución : Hay que derivar la función g, definida por :

$$g(x) = e^{f(x)}$$

Vamos a usar la regla de la cadena. Escogemos las siguientes funciones a y b :

$$a(x) = e^{x} \qquad b(x) = f(x)$$

Las hemos escogido bien, ya que si las componemos, nos da la función g :

$$a(b(x)) = a\big(f(x)\big) = e^{f(x)}$$

Así que las derivamos y aplicamos la regla de la cadena :

$$a'(x) = e^{x} \qquad b'(x) = f'(x)$$

$$\big(a(b(x))\big)' = a'\big(b(x)\big)\cdot b'(x) = a'\big(f(x)\big)\cdot f'(x) = e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

b) Solución : En este caso, la función es casi la misma, solo que la base del exponente ya no es el número e. Repetimos el mismo proceso que en el apartado anterior :

Escoger funciones : $a(x) = \alpha^{x}$ $\qquad b(x) = f(x)$

Comprobar composición : $a(b(x)) = a\big(f(x)\big) = \alpha^{f(x)}$

Derivar funciones escogidas : $a'(x) = \alpha^{x}\cdot \ln(\alpha)$ $\qquad b'(x) = f'(x)$

Regla de la cadena :

$$\big(a(b(x))\big)' = a'\big(b(x)\big)\cdot b'(x) = a'\big(f(x)\big)\cdot f'(x) = \alpha^{f(x)}\cdot \ln(\alpha)\cdot f'(x)$$

c) Solución : Cuando estudiamos la función, vemos que la regla de la cadena no nos lleva a ningún lado. Seguimos la indicación del ejercicio y modificamos f hasta que llegamos a que :

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln(x)}$$

La hemos convertido en algo que ya sabemos derivar! Lo único que hay que hacer es usar o la regla de la cadena o el apartado a). Si usamos el apartado a), vemos directamente que :

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (x \cdot \ln(x))'$$

Hay que derivar, entonces, $x \cdot \ln(x)$, un producto de funciones. Usando la regla del producto, obtenemos :

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (x \cdot \ln(x))' = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1)$$

Recordando que $e^{x \cdot \ln(x)}$ era x^x , nos queda :

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

d) Solución : Usando el mismo truco que en el apartado c), modificamos la función f y nos queda :

$$f(x) = a(x)^{b(x)} = e^{\ln(a(x)^{b(x)})} = e^{b(x) \cdot \ln(a(x))}$$

Podríamos usar ahora la regla de la cadena o el apartado b). Con el apartado b), obtenemos rápidamente que la derivada es :

$$f'(x) = a(x)^{b(x)} \cdot (b(x) \cdot \ln\big(a(x)\big))'$$

Así que todo reside en derivar $(b(x) \cdot \ln\big(a(x)\big))'$, que es un producto de funciones (para ver como derivar $\ln\big(a(x)\big)$, recomiendo ver el vídeo sobre derivadas de logaritmos). Aplicando la regla del producto, sacamos el resultado :

$$f'(x) = a(x)^{b(x)} \cdot (b'(x) \cdot \ln\big(a(x)\big) + b(x) \cdot \frac{a'(x)}{a(x)})$$

2. Deriva las siguientes funciones

Soluciones :

$$a'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot e^{x^2+2x}$$

$$b'(x) = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$c'(x) = -2x \cdot \ln(2) \cdot 4^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$d'(x) = 24 \cdot \ln(2) \cdot \cos(x) \cdot 8^{8\sin(x)}$$

$$e'(x) = \ln(7) \cdot 4 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) \cdot 7^{2\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = (\ln(x) + 1) \cdot 4x^{\frac{1}{4}x}$$

$$g'(x) = \frac{\ln(x) + 2}{4\sqrt{x}} \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \sin(x)^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)\ln(\sin(x)) + \frac{cos^2(x)}{\sin(x)})$$