

Ejercicios de operaciones con funciones reales

Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real y de dominios $\text{Dom}(f)$ y $\text{Dom}(g)$, respectivamente.

Suma de funciones

Llamamos **suma de f y g** , a una operación real que denominamos $(f + g)$ tal que:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \text{ para todo } x \in [\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)]$$

Llamamos **función nula o función cero** a aquella función que asigna a cualquier elemento del dominio el valor 0 como imagen. La expresamos por $\mathbf{0}$.

Se verifica que:

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$$

Por tanto, la función nula es el **elemento neutro** para la suma de funciones.

Dada una función f definida en D , llamamos **función opuesta de f** , y la expresamos por $-f$, a la función:

$$\begin{aligned} -f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (-f)(x) = -f(x) \end{aligned}$$

La función opuesta verifica que para toda función f se cumple que:

$$f + (-f) = (-f) + f = 0$$

La función opuesta es el **elemento opuesto** para la suma de funciones.

Ejemplos de suma de funciones

Dadas las funciones f y g , vamos a hallar $(f + g)$:

$$\text{a) } f(x) = x - 5 \quad ; \quad g(x) = \frac{5}{x + 1}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - 5 + \frac{5}{x+1} = \frac{(x-5)(x+1) + 5}{x+1} = \frac{x^2 - 4x}{x+1}$$

Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f + g) &= \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \cap [\mathbb{R} - \{1\}] \\ &= \mathbb{R} - \{1\} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \sqrt{x-9}$; $g(x) = \sqrt{5-x}$

Veamos si es posible efectuar la suma de estas funciones.

Como $\text{Dom}(f) = [9, \infty)$ y $\text{Dom}(g) = (-\infty, 5]$, tenemos que:

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [9, \infty) \cap (-\infty, 5] = \emptyset$$

No hay ningún elemento que pertenezca a la intersección de los dominios de f y g , por lo que no existe $f + g$.

Producto de funciones

Llamamos **producto de f por g** , y lo expresamos por $(f \cdot g)$, a la función:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad , \text{ para todo } x \in [\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)]$$

Llamamos **función unidad**, y la expresamos por **1**, a aquella función que a cada número real le asigna el número real 1.

Se verifica que:

$$(f \cdot 1)(x) = f(x) \cdot 1(x) = f(x)$$

La función unidad es el **elemento neutro** para el producto de funciones.

Dada una función f de dominio D , tal que $f(x) \neq 0$ para todo valor x de D , llamamos **función recíproca de f** , y la expresamos por $1/f$, a la función:

$$\begin{array}{l} 1/f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow (1/f)(x) = 1/f(x) \end{array}$$

La función recíproca es el **elemento inverso** para el producto de funciones.

Si f es una función que se anula en algún punto de su dominio D , el dominio de $1/f$ es:

$$\text{Dom}(1/f) = D - \{ x \in D / f(x) = 0 \}$$

Ejemplo de producto de funciones

Dadas las funciones f y g , vamos a hallar $(f \cdot g)$:

$$f(x) = \sqrt{x - 3} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x + 2}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x - 3} \cdot \frac{1}{x + 2} = \frac{\sqrt{x - 3}}{x + 2}$$

Como $\text{Dom}(f) = [3, \infty)$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2\}$, tenemos que:

$$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [3, \infty) \cap \mathbb{R} - \{-2\} = [3, \infty)$$

Ejemplo de función recíproca

Vamos a hallar la función recíproca de f , donde f es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Hacemos $(1/f)(x)$:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > -1 \text{ y } x \neq 0 \end{cases}$$

Vemos que: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Y además $f(x) = 0$ sólomente si $x = 0$. Luego: $\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} = \{0\}$

Por tanto el dominio de la función recíproca de f es:

$$\text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) = \text{Dom}(f) - \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Cociente de funciones

Llamamos **cociente de f y g** a otra función real que denominamos por f/g , tal que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ para todo } x \in [\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)] - \{x / g(x) = 0\}$$

Ejemplo de cociente de funciones

Dadas las funciones f y g, vamos a hallar (f/g):

$$f(x) = \sqrt{x - 2} \quad ; \quad g(x) = \frac{x - 5}{x + 3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x - 2}}{\frac{x - 5}{x + 3}} = \frac{\sqrt{x - 2} \cdot (x + 3)}{x - 5}$$

Observamos que $g(x) = 0$ sólomente si $x = 5$.

$$\text{Luego: } \{x / g(x) = 0\} = \{5\}$$

Como $\text{Dom}(f) = [2, \infty)$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-3\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f / g) &= [\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)] - \{x / g(x) = 0\} \\ &= [[2, \infty) \cap \mathbb{R} - \{-3\}] - \{5\} = [2, \infty) - \{5\} \end{aligned}$$

unprofesor.com