SOLUCIONES DE DIBUJOS DE FUNCIONES

1. Realiza el siguiente ejercicio

a) $f(x)=\frac{x^2}{2-x}$

- Dominio

Hay que procurar que el denominador no de 0 :

$$2-x=0$$

$$x=2$$

Vemos que en $x\ =\ 2$ la función no está definida, así que :

$$Dom(f)=\mathbb{R}-\{2\}$$

- Discontinuidades

En $x\ =\ 2$, la función es discontinua. Veamos el tipo de discontinuidad con los límites laterales :

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{2-x}=\frac{4}{\lim\limits_{x\to 2^-}2-x}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{2-x}=\frac{4}{\lim\limits_{x\to 2^+}2-x}=+\infty$$

Vemos entonces que es una discontinuidad asintótica.

- Asíntotas horizontales

Veamos los límites infinitos de la función :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2-x}=-\infty \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{2-x}=+\infty$$

Ambos son infinitos, así que no hay asíntotas horizontales.

- Asíntotas verticales

Las asíntotas verticales no son más que las discontinuidades asintóticas :

Asíntotas verticales : $x = 2$

- <u>Asíntotas oblicuas</u>

Observemos los límites infinitos de $\frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{(2-x)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x^2+2x} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{(2-x)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x^2+2x} = -1$$

Hemos obtenido un número diferente de 0 o ∞ : Tenemos una recta con pendiente $m = -1$ que es asíntota oblicua de la función. Calculemos n, su corte en el eje y :

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(2-x)} + x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{(2-x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{(2-x)} = -2$$

Finalmente, obtenemos que la recta $y = -x - 2$ es una asíntota oblicua de la función.

- <u>Cortes en los ejes</u>

Para los cortes en el eje x, hay que resolver $f(x) = 0$. Las x que encontremos nos darán los puntos de corte $(x, 0)$.

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2}{(2-x)} = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

La función corta en el eje y cuando $x = 0$, o sea, en el punto $(0,0)$.

Para los cortes en el eje y, hay que calcular $f(0)$. El resultado nos dará el punto de corte $(0, f(0))$.

$$f(0) = \frac{0^2}{(2-0)} = \frac{0}{2} = 0$$

Nos ha salido que la función corta en el eje x cuando $y = 0$, o sea, en el punto $(0,0)$.

- Signo

Nos construimos la siguiente tabla donde ponemos los puntos de corte con el eje x y las discontinuidades :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$\nexists$	$-\infty$

Dentro de estos intervalos, tenemos garantizado gracias al Teorema de Bolzano, que la función no cambia de signo, así que probamos un número dentro de cada intervalo.

$$f(-1000) = \frac{(-1000)^2}{(2+1000)} = \frac{1000000}{1002} > 0$$

$$f(1) = \frac{1^2}{(2-1)} = \frac{1}{1} > 0$$

$$f(3) = \frac{3^2}{(2-3)} = \frac{9}{-1} < 0$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$-\infty$

Concluimos entonces en que :

$$Sign_+(f) = (-\infty, 0) \cup (0,2)$$

$$Sign_{-}(f) = (2, +\infty)$$

- Puntos críticos

Para los puntos críticos, hay que resolver $f'(x) = 0$. Derivando la función, se ve que $f'(x) = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$, así que :

$$\frac{-x^2 + 4x}{(2-x)^2} = 0$$

$$-x^2 + 4x = 0$$

$$x = 0; x = 4$$

Para encontrar la altura de estos puntos, calculamos $f(0)$ y $f(4)$.

$$f(0) = \frac{0^2}{(2-0)} = 0$$

$$f(4) = \frac{4^2}{(2-4)} = \frac{16}{-2} = -8$$

Los puntos críticos de la función son $(0,0)$ y $(4, -8)$.

- Monotonía (intervalos en los que la función crece o decrece)

Nos hacemos otra tabla con los puntos críticos y las discontinuidades de $f'(x)$. Sus discontinuidades se ve que son $x = 2$. Así, nos queda :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	$\nexists$	0	$-\infty$

Por el teorema de Bolzano, tenemos garantizado que la derivada no cambie de signo en estos intervalos, así que probamos un número en cada uno.

$$f'(-1) = \frac{-1-4}{(2+1)^2} = \frac{-5}{9} < 0$$

$$f'(1) = \frac{-1+4}{(2-1)^2} = \frac{3}{1} > 0$$

$$f'(3) = \frac{-9+12}{(2-3)^2} = \frac{3}{1} > 0$$

$$f'(5) = \frac{-25+20}{(2-5)^2} = \frac{-5}{9} < 0$$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-\infty$

Con la tabla se ve fácilmente que el punto crítico en $x = 0$ es un mínimo (ya que la función pasa de decrecer a crecer), y el punto crítico en $x = 4$ es un máximo (la función pasa de crecer a decrecer).

Así, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son :

$$Crec(f) = (0,2) \cup (2,4)$$

$$Dec(f) = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

- Puntos de inflexión

Para los puntos de inflexión, hay que resolver $f''(x) = 0$. Derivando la derivada, se ve que $f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3}$, así que :

$$\frac{8}{(2-x)^3} = 0$$

$$8 = 0$$

La ecuación no tiene solución, así que no hay punto de inflexión.

- Concavidad (intervalos en los que la función es cóncava o convexa)

Nos hacemos otra tabla con los puntos de inflexión (no hay) y las discontinuidades de $f''(x)$. Sus discontinuidades se ve que son $x = 2$. Así, nos queda :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\nexists$	$-\infty$

Por el teorema de Bolzano, tenemos garantizado que la segunda derivada no cambie de signo en estos intervalos, así que probamos un número en cada uno.

$$f''(0) = \frac{8}{(2-0)^2} = \frac{8}{4} > 0$$

$$f''(10) = \frac{8}{(2-10)^2} = \frac{8}{64} > 0$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$	$+\infty$	$+$	$\nexists$	$+$	$-\infty$

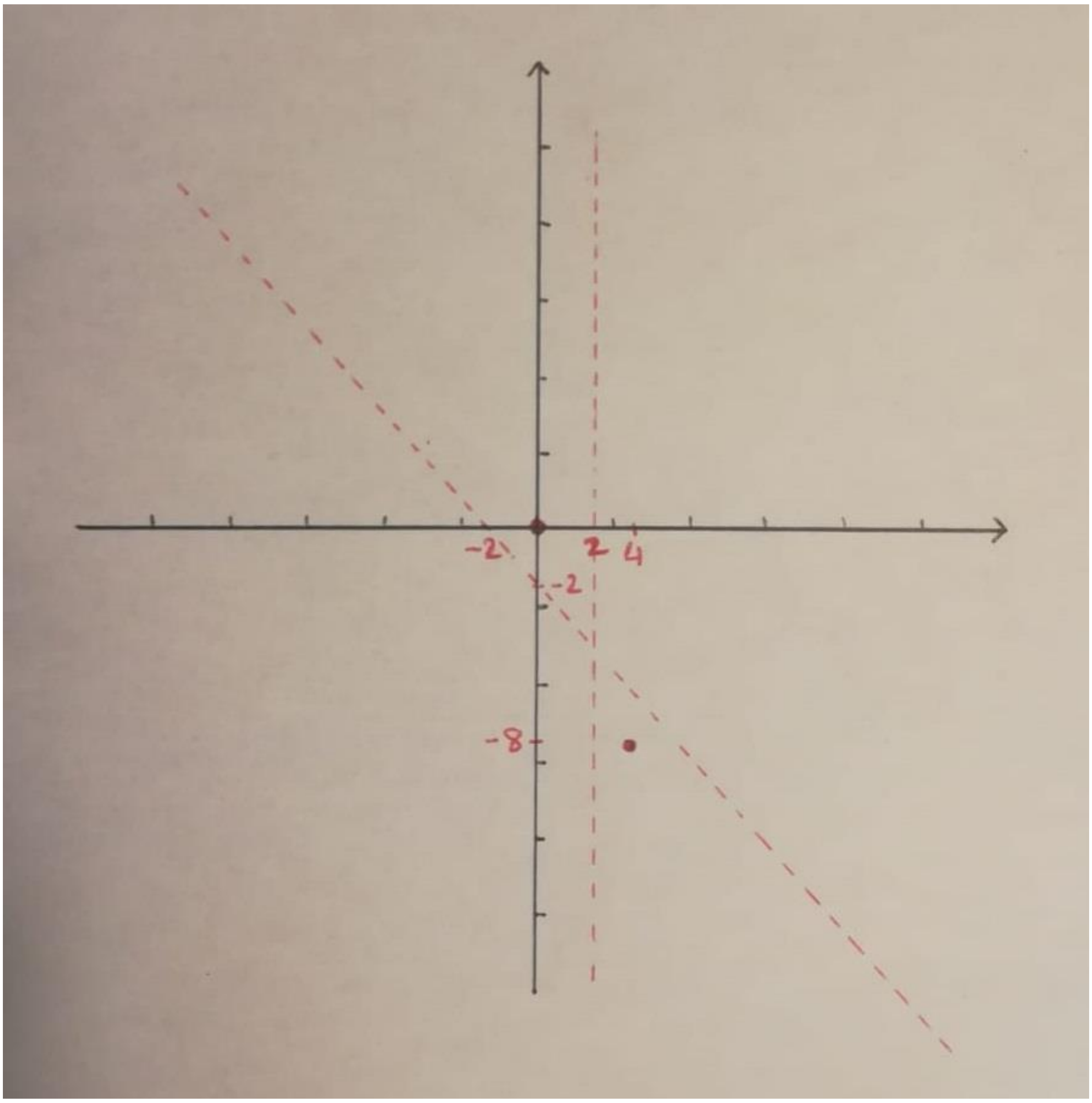
Así, los intervalos de concavidad ($f''(x) > 0$) y convexidad ($f''(x) < 0$) son :

$$Conc(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$Conv(f) = \emptyset$$

DIBUJO DE LA FUNCIÓN

Primero ponemos todos los puntos particulares que hayamos encontrado, como los cortes, los máximos, los mínimos, los puntos de inflexión, etc… y las asíntotas que hayamos encontrado. Tenemos una vertical y una oblicua.

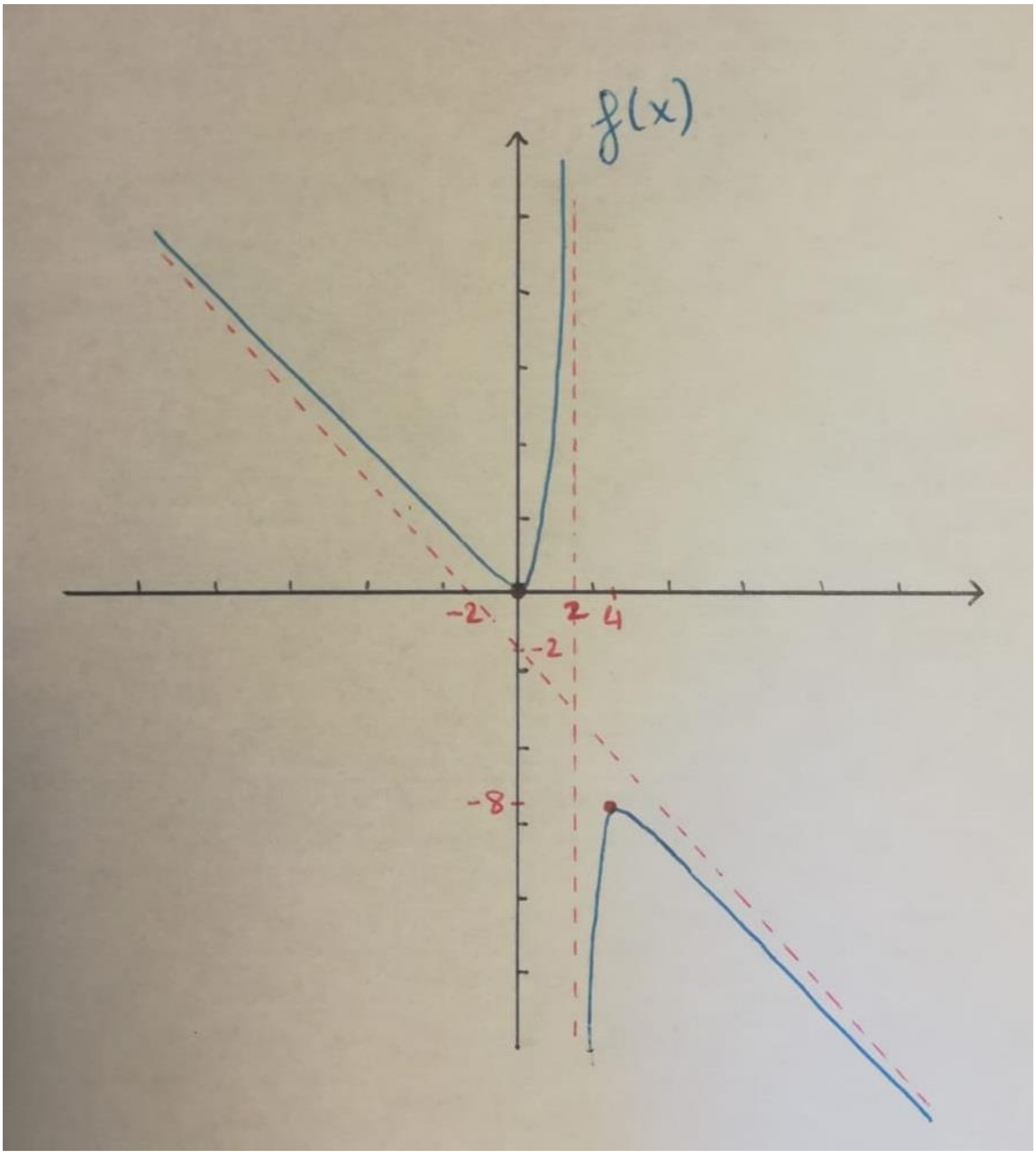


Esos dos puntos son un mínimo y un máximo, respectivamente, así que la función decrece hasta el primero, y después crece. En el segundo, la función crece hasta alcanzarlo, y después decrece.

Para la izquierda y la derecha, la función se va acercando infinitamente a la asíntota oblicua.

Por la izquierda en la asíntota vertical, la función va hacia arriba, al infinito. Por la derecha, va al revés.

Con todo esto podemos hacer un dibujo bastante representativo :



b) $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

- Dominio :
  - $Dom(f) = (0, +\infty)$
- Discontinuidades :
  - $x = 0$: Asintótica
- Asíntotas horizontales
  - $y = 0$: Derecha
- Asíntotas verticales
  - $x = 0$
- Asíntotas oblicuas :
  - No hay
- Cortes en los ejes
  - Eje x : $(1,0)$
  - Eje y : No hay
- Signo (intervalos en los que la función es positiva o negativa)
  - $Sign_{+}(f) = (0,1)$
  - $Sign_{-}(f) = (1, +\infty)$
- Máximos y mínimos
  - Máximos : $(e, \frac{1}{e})$
  - Mínimos : No hay
- Monotonía (intervalos en los que la función crece o decrece)
  - $Crec(f) = (0, e)$
  - $Dec(f) = (e, +\infty)$
- Puntos de inflexión :
  - $(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2 \cdot \sqrt{e^3}})$
- Concavidad (intervalos en los que la función es cóncava o convexa)
  - $Conc(f) = (\sqrt{e^3}, +\infty)$
  - $Conv(f) = (0, \sqrt{e^3})$

c) $p(x) = x^4 + x^2 - 8$

- Dominio :
  - $Dom(f) = \mathbb{R}$
- Discontinuidades :
  - No hay
- Asíntotas horizontales
  - No hay
- Asíntotas verticales
  - No hay
- Asíntotas oblicuas :
  - No hay
- Cortes en los ejes
  - Eje x : $(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{2}}, 0)$, $(-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{2}}, 0)$
  - Eje y : $(0, -8)$
- Signo (intervalos en los que la función es positiva o negativa)
  - $Sign_+(f) = (-\infty, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{2}}, +\infty)$
  - $Sign_-(f) = (-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{2}})$
- Máximos y mínimos
  - Máximos : No hay
  - Mínimos : $(0, -8)$
- Monotonía (intervalos en los que la función crece o decrece)
  - $Crec(f) = (0, +\infty)$
  - $Dec(f) = (-\infty, 0)$
- Puntos de inflexión :
  - No hay
- Concavidad (intervalos en los que la función es cóncava o convexa)
  - $Conc(f) = \mathbb{R}$
  - $Conv(f) = \emptyset$

d) $q(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

- Dominio :
  - $Dom(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
- Discontinuidades :
  - $x = -3$: Fin de dominio en el punto $(-3,0)$
  - $x = 3$: Fin de dominio en el punto $(3,0)$
- Asíntotas horizontales
  - No hay
- Asíntotas verticales
  - No hay
- Asíntotas oblicuas :
  - No hay
- Cortes en los ejes
  - Eje x : $(-3,0)$, $(3,0)$
  - Eje y : No hay
- Signo (intervalos en los que la función es positiva o negativa)
  - $Sign_+(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
  - $Sign_-(f) = \emptyset$
- Máximos y mínimos
  - Máximos : No hay
  - Mínimos : No hay
- Monotonía (intervalos en los que la función crece o decrece)
  - $Crec(f) = [3, +\infty)$
  - $Dec(f) = (-\infty, -3]$
- Puntos de inflexión :
  - No hay
- Concavidad (intervalos en los que la función es cóncava o convexa)
  - $Conc(f) = \emptyset$
  - $Conv(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

e) $l(x) = e^{\frac{x^2-1}{x}}$

- Dominio :
  - $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- Discontinuidades :
  - $x = 0$: Asintótica
- Asíntotas horizontales
  - $y = 0$: Izquierda
- Asíntotas verticales
  - $x = 0$
- Asíntotas oblicuas :
  - No hay
- Cortes en los ejes
  - Eje x : No hay
  - Eje y : No hay
- Signo (intervalos en los que la función es positiva o negativa)
  - $Sign_+(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
  - $Sign_-(f) = \emptyset$
- Máximos y mínimos
  - Máximos : $(-1, \frac{1}{e^2})$
  - Mínimos : $(1, e^2)$
- Monotonía (intervalos en los que la función crece o decrece)
  - $Crec(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - $Dec(f) = (-1,0) \cup (0,1)$
- Puntos de inflexión :
  - $(-1.68377, 0.10252)$
  - $(-0.37151, 0.04674)$

  Indicación : Resolver este apartado implica resolver una ecuación de 4º grado. No la resolváis a mano, es una locura. En lugar de eso, poned la ecuación en el Wolfram Alpha y comprobad que os salen estas dos soluciones.
- Concavidad (intervalos en los que la función es cóncava o convexa)
  - $Conc(f) = (-\infty, -1.68377) \cup (-0.37151, 0) \cup (0, +\infty)$
  - $Conv(f) = (-1.68377, -0.37151)$